A

COGNOME E NOME: ______________________________

MATRICOLA: | | | | | | |

Lasciare vuote le tabelle seguenti.

Esercizio	1	2	3	4	5	6	7
Punti	3	3	2½	3	3	2½	2½
Punti ottenuti							

Esercizio	8	9	10	11	12		**Totale**
Punti	3	2½	2	4	5		36
Punti ottenuti							

1. (3 punti) Siano

$$L_1 = \lim_{x\to+\infty} \frac{x\log(\log x)}{\log^2 x}; \qquad L_2 = \lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{x}^{\log x}}{(\log x)^x}.$$

Allora $L_1 =$ ______ e $L_2 =$ ______.

2. (3 punti) Sia $f : [-1, \frac{1}{2}[\to \mathbb{R}$ la funzione definita da

$$f(x) = \frac{4}{3}x^2 \arctan 2x + 2x + 2x^2 + \log(1-2x).$$

Stabilite per ciascuna delle seguenti due affermazioni se è vera o falsa.

(a) $f(0) = f'(0) = f''(0) = 0$, $f'''(0) \neq 0$. ◯ Vera ◯ Falsa

Perché? ______________________________

(b) $x = 0$ è un punto di massimo locale (stretto) per f. ◯ Vera ◯ Falsa

Perché? ______________________________

Determinate $\alpha > 0$ tale che $\displaystyle\sum_{n=3}^{+\infty} f(\frac{1}{n^\alpha})$ è convergente. Si ha α ______.

Perché? ______________________________

3. (2½ punti) Sia

$$L = \lim_{x\to 0^+} \sin x^3 \int_1^{\frac{1}{x}} t^2 e^{\frac{1}{t}}\, dt.$$

Allora $L =$ ______.

4. (3 punti) Sia $f : [-\sqrt{2}, \sqrt{2}] \to \mathbb{R}$ la funzione definita da

$$f(x) = \sqrt{2 - x^2} + x.$$

(a) La funzione f ha un punto critico in $x =$ ______.

(b) f ha un punto di massimo assoluto in $x =$ ______ e un punto di minimo assoluto in $x =$ ______.

(c) Verificate che f soddisfa le ipotesi del teorema di Lagrange su $[-\sqrt{2}, \sqrt{2}]$ e determinate il punto di Lagrange $c \in \,]-\sqrt{2}, \sqrt{2}[$. Si ha $c =$ ______.

Motivate: ____

(d) Sia $F(x) = \displaystyle\int_{-\sqrt{2}}^{x} f(t)dt$ la funzione integrale di f. Si ha $\displaystyle\max_{[-\sqrt{2},\sqrt{2}]} F(x) =$ ______.

Motivate: ____

5. (3 punti) Sia $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una successione di numeri reali positivi tali che

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{1}{3}.$$

Stabilite per ciascuna delle seguenti affermazioni se segue dalle ipotesi.

(a) $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} a_n = 0$. ◯ Sì ◯ No

Perché? ____

(b) La serie $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}(e^{a_n} - 1)$ è convergente. ◯ Sì ◯ No

Perché? ____

(c) La serie $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\sqrt{a_n}$ è assolutamente convergente. ◯ Sì ◯ No

Perché? ____

(d) La serie $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n a_n$ è convergente per il criterio di Leibniz. ◯ Sì ◯ No

Perché? ____

6. (2½ punti) Sia I_α l'insieme degli $\alpha \in \mathbb{R}_{>0}$ per cui risulta convergente l'integrale improprio

$$\int_1^{+\infty} \frac{x^{2\alpha}\cosh x^2}{e^{\alpha(x^2+x)}}dx.$$

Stabilite per ciascuna delle tre seguenti affermazioni se è vera o falsa.

(a) L'insieme I_α è un insieme limitato. ◯ Vera ◯ Falsa

(b) L'insieme I_α ammette minimo. ◯ Vera ◯ Falsa

(c) L'insieme I_α ammette un solo punto di accumulazione. ◯ Vera ◯ Falsa

Inoltre

(d) $\inf I_\alpha =$ ______.

7. (2½ punti) Sia

$$A = \int_{\frac{1}{3}}^{\frac{e}{3}} x \log^2(3x) dx \,.$$

Allora
$A = ae^b + c$, dove $a =$ ______, $b =$ ______ e $c =$ ______.

8. (3 punti) Sia $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la funzione integrale definita da

$$F(x) = \int_0^x \frac{\arctan t}{1+t^4} dt.$$

Stabilite per ciascuna delle seguenti affermazioni se è vera o falsa.

(a) La funzione F è pari su $\mathbb{R}$ ◯ Vera ◯ Falsa

Perché? ____

(b) La funzione $F \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R})$. ◯ Vera ◯ Falsa

(c) $F(x) = \frac{x^2}{2} + o(x^2)$ per $x \to 0$. ◯ Vera ◯ Falsa

Perché? ____

(d) La funzione F ha un asintoto orizzontale per $x \to +\infty$. ◯ Vera ◯ Falsa

Perché? ____

9. (2½ punti) Sia I_α l'insieme degli $\alpha \in \mathbb{R}$ per cui risulta convergente la serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\big[\log(n+2)! - \log n!\big] \sin \dfrac{1}{\sqrt{n}}}{\sqrt[4]{n} \log^\alpha(n+2)}.$$

Si ha $I_\alpha =$ ____________.

10. (2 punti) Sia $\widehat{y}(x)$ l'unica soluzione a valori reali definita su $]0, +\infty[$ che risolve l'equazione differenziale

$$x^2 y' + 2xy - 1 = 0$$

e per la quale

$$\lim_{x \to 0^+} x^2 y(x) = 2.$$

Allora $\widehat{y}(1) =$ ______.

Per i seguenti DUE esercizi è richiesto UN ACCURATO SVOLGIMENTO.

11. (4 punti) Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funzione convessa.
Stabilite per ciascuna delle seguenti affermazioni se è vera o se è falsa. Motivate le risposte.
   (a) $f(0) \leq \frac{1}{2}f(1) + \frac{1}{2}f(-1)$ ◯ Vera ◯ Falsa

   (b) $f(0) \leq \frac{1}{2}f(x) + \frac{1}{2}f(-x)$ per ogni $x \in \mathbb{R}$. ◯ Vera ◯ Falsa

   (c) Se $\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$, allora $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$. ◯ Vera ◯ Falsa

   (d) Se f è anche crescente in $\mathbb{R}$, allora $f \circ f$ è convessa in $\mathbb{R}$. ◯ Vera ◯ Falsa

12. (5 punti) (a) Sia $\alpha \in \mathbb{R}$. Determinate la soluzione $y_\alpha(x)$ del problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' - y^2(e^x(x^2+1)) = 0 \\ y(0) = \alpha. \end{cases}$$

Si ha per $\alpha = 0$ la soluzione $y_0(x) =$ __________________.
Si ha per $\alpha \neq 0$ la soluzione $y_\alpha(x) =$ ______________________________.

   (b) Sia $\alpha = -\frac{1}{4}$. Studiate brevemente la funzione $y_\alpha(x)$ per tale α e rappresentatela graficamente. Determinate l'equazione della retta tangente al grafico di $y_\alpha(x)$ in $x = 0$.